Theorie

Unter einer Kurvendiskussion verstehen wir die Untersuchung des Schaubilds einer Funktion auf seine geometrischen Eigenschaften. Um eine Kurvendiskussion für eine Funktion f zu erstellen, müssen wir mehrere Schritte durchführen. Mit diesen erhalten wir das volle Verständnis über den genauen Verlauf und die charakteristischen Punkte von f.

- Untersuchung der Symmetrie
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
  - Schnittpunkte mit x-Achse: Wir setzen $f(x) = 0$.
  - Schnittpunkt mit y-Achse: Wir berechnen $f(0)$.
- Bestimmung der Extrempunkte: Wir setzen $f'(x) = 0$.
- Bestimmung der Wendepunkte: Wir setzen $f''(x) = 0$.
- Zeichnen des Schaubildes, wobei alle charakteristischen Punkte zu erkennen sein müssen!

Aufgaben zum Abi-Check

• **1.** Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - x^2$ durch und zeichnen Sie dann das Schaubild von f.

Lösungen

1.

- *Symmetrie*: Es gilt

$$f(-x) = \frac{1}{6}(-x)^4 - (-x)^2 = \frac{1}{6}x^4 - x^2 = f(x),$$

somit ist die Funktion symmetrisch zur y-Achse.

- *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen*: Wir berechnen $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{6}$ (einfach), $x_2 = 0$ (doppelt), $x_3 = \sqrt{6}$ (einfach). Somit erhalten wir die Schnittpunkte $\mathrm{N}_1(-\sqrt{6} \mid 0)$, $\mathrm{N}_2(0 \mid 0)$ (doppelt), $\mathrm{N}_3(\sqrt{6} \mid 0)$ mit der x-Achse. Da $f(0) = 0$, ist $\mathrm{S}(0 \mid 0)$ der Schnittpunkt mit der y-Achse.

- *Bestimmung der Extrempunkte*: Für die Ableitungen gilt

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x, \qquad f''(x) = 2x^2 - 2, \qquad f'''(x) = 4x\,.$$

Wir berechnen $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ bzw. $x_3 = \sqrt{3}$. Dann gilt $f''(-\sqrt{3}) = 4 > 0$, $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ lokaler Tiefpunkt $\mathrm{T}_1(-\sqrt{3} \mid -\frac{3}{2})$. Außerdem $f''(0) = -2 < 0$, $f(0) = 0 \Rightarrow$ lokaler Hochpunkt $\mathrm{H}(0 \mid 0)$. Schließlich $f''(\sqrt{3}) = 4 > 0$, $f(\sqrt{3}) = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ lokaler Tiefpunkt $\mathrm{T}_2(\sqrt{3} \mid -\frac{3}{2})$.

- *Bestimmung der Wendepunkte*: Wir berechnen $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ bzw. $x_2 = 1$. Dann gilt $f'''(-1) = -4 \neq 0$, $f(-1) = -\frac{5}{6} \Rightarrow$ Wendepunkt $\mathrm{W}_1(-1 \mid -\frac{5}{6})$. Außerdem $f'''(1) = 4 \neq 0$, $f(1) = -\frac{5}{6} \Rightarrow$ Wendepunkt $\mathrm{W}_2(1 \mid -\frac{5}{6})$.

- *Zeichnen des Schaubildes*: Nun können wir das Schaubild der Funktion zeichnen (→ Abb. 1).

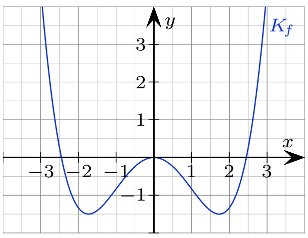

Abbildung 1: Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - x^2$