



Theorie

Die *Tangente* an das Schaubild K_f einer Funktion f im Kurvenpunkt $P(u | f(u))$ ist diejenige Gerade, welche K_f in diesem Punkt berührt (\rightarrow Abb. 1a). Die *Normale* (*Senkrechte/Orthogonale*) an das Schaubild K_f einer Funktion f im Punkt $P(u | f(u))$ ist diejenige Gerade, welche in diesem Punkt senkrecht zu K_f verläuft (\rightarrow Abb. 1b).

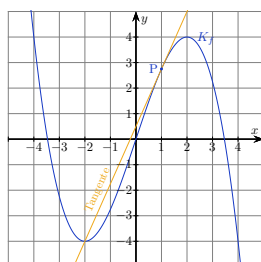
Beispiel: Berechnen Sie die Tangente und Normale an das Schaubild von $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$ an der Stelle $u = 1$.

Lösung: Wir berechnen zunächst $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$, $f'(1) = \frac{9}{4}$ und $f(1) = \frac{11}{4}$. Die Tangente hat die Gleichung $y = \frac{9}{4}x + b$ mit unbekanntem b . Um es zu bestimmen, setzen wir den Punkt $P(1 | \frac{11}{4})$ in die Gerade ein:

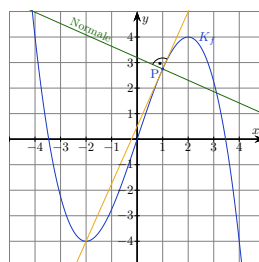
$$\frac{11}{4} = \frac{9}{4} \cdot 1 + b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Für die Steigung der Normalen gilt $m = -\frac{1}{f'(u)}$. Die Normale hat die Gleichung $y = -\frac{4}{9}x + b$ mit unbekanntem b . Um es zu bestimmen, setzen wir den Punkt $P(1 | \frac{11}{4})$ in die Gerade ein:

$$\frac{11}{4} = -\frac{4}{9} \cdot 1 + b \Rightarrow b = \frac{115}{36} \Rightarrow y = -\frac{4}{9}x + \frac{115}{36}$$



(a) Tangente an K_f in P



(b) Normale an K_f in P

Abbildung 1: Tangente und Normale

Aufgaben zum Abi-Check

- 1. Berechnen Sie für die angegebene Stelle $x = -1$ die Tangente T und die Normale N an das Schaubild K der Funktion f mit $f(x) = 1 - x^2$ und zeichnen Sie jeweils die Schaubilder von f sowie die Tangente T und Normale N .
- 2. Das Schaubild einer Funktion f hat an der Stelle $x = 3$ die Tangente $y = 2x - 1$ und an der Stelle $x = 4$ die Normale n mit der Gleichung $y = -x + 3$. Tim stellt anhand dieses Textes vier Bedingungen für die Funktion auf:
 - $f(5) = 3$
 - $f'(3) = 2$
 - $f(4) = -1$
 - $f'(4) = -1$

Sind alle Bedingungen richtig? Falls nein, verbessern Sie bzw. ergänzen Sie fehlende Bedingungen!



Lösungen

1. Schaubild siehe Abb. 2. $f'(x) = -2x$, $f'(-1) = 2$, $f(-1) = 0$, $T : y = 2x + 2$, $N : y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

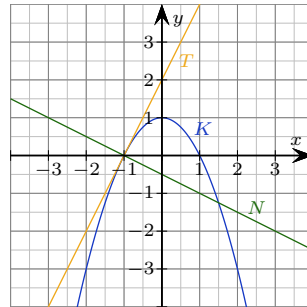


Abbildung 2: Schaubild zu Aufgabe 1

2. Die erste Bedingung ist falsch. Sie müsste lauten: $f(3) = 5$. Die zweite und dritte Bedingung ist jeweils richtig. Die vierte Bedingung ist falsch. Sie muss $f'(4) = 1$ lauten, da die Funktion auf die Gerade $y = -x + 3$ senkrecht stehen muss.