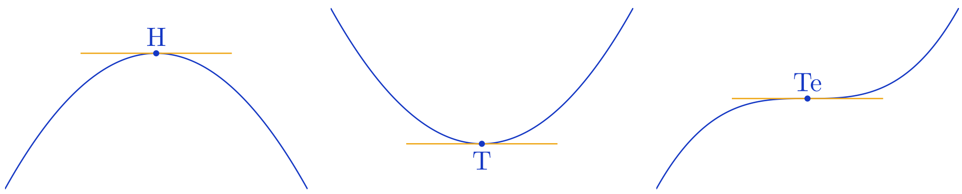
Theorie

Das Schaubild der Funktion f ist an der Stelle u

- (streng) monoton steigend, wenn gilt: $f'(u) \geq 0$ ($f'(u) > 0$)
- (streng) monoton fallend, wenn gilt: $f'(u) \leq 0$ ($f'(u) < 0$)

Das Schaubild der Funktion f hat an der Stelle u einen

- lokalen Hochpunkt $\mathrm{H}(u \mid f(u))$, wenn $f'(u) = 0$ gilt und
  - f' dort einen Vorzeichenwechsel (VZW) von $+$ nach $-$ hat
  - **oder** $f''(u) < 0$ ist.
- lokalen Tiefpunkt $\mathrm{T}(u \mid f(u))$, wenn $f'(u) = 0$ gilt und
  - f' dort einen Vorzeichenwechsel (VZW) von $-$ nach $+$ hat
  - **oder** $f''(u) > 0$ ist.
- Terrassenpunkt (oder Sattelpunkt) $\mathrm{Te}(u \mid f(u))$, wenn $f'(u) = 0$ gilt und
  - f' dort keinen Vorzeichenwechsel (VZW) hat
  - **oder** $f''(u) = 0$ ist.



(a) lokaler Hochpunkt (b) lokaler Tiefpunkt (c) Terrassenpunkt

Abbildung 1: Mögliches Aussehen der Punkte $\mathrm{P}(u \mid f(u))$ mit $f'(u) = 0$

Aufgaben zum Abi-Check

• **1.** Berechnen Sie die Extrempunkte des Schaubildes K_f der Funktion f mit $f(x) = 2x - \frac{1}{6}x^3$ und geben Sie an, um welche Art von Extrempunkt es sich handelt. Geben Sie die Monotoniebereiche an und zeichnen Sie K_f.

•• **2.** Welche Aussagen lassen sich über das Schaubild einer Funktion f treffen, wenn gilt: $f(-1) = 3$, $f'(-1) = 0$, $f''(-1) = 4$

••• **3.** Für welche Werte von a und b hat das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2$ den Hochpunkt $\mathrm{H}(1 \mid \frac{1}{3})$? Berechnen Sie exakt.

Lösungen

1. Schaubild siehe Abb. 2. Wir berechnen $f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$, $f''(x) = -x$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2$ bzw. $x_2 = 2$. Es gilt $f''(-2) = 2 > 0$, $f(-2) = -\frac{8}{3}$, $f''(2) = -2 < 0$ und $f(2) = \frac{8}{3}$.

	$x \in (-\infty; -2)$	$x = -2$	$x \in (-2; 2)$	$x = 2$	$x \in (2; \infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$\mathrm{T}(-2 \mid -\frac{8}{3})$	$\nearrow$	$\mathrm{H}(2 \mid \frac{8}{3})$	$\searrow$

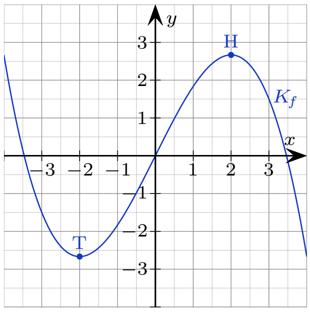


Abbildung 2: Schaubild zu Aufgabe 1

2. Die Funktion hat den lokalen Tiefpunkt $\mathrm{T}(-1 \mid 3)$.

3. Wegen $f'(x) = x(3ax + 2b)$ hat die Funktion die Extremstellen $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = -\frac{2b}{3a}$. Aus den Bedingungen $f(1) = \frac{1}{3}$ und $f'(1) = 0$ erhalten wir ein lineares Gleichungssystem bestehend aus den Gleichungen $3a + 2b = 0$ und $a + b = \frac{1}{3}$. Die Werte $a = -\frac{2}{3}$ und $b = 1$ lösen das Gleichungssystem. Somit erhalten wir die Funktion f mit $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2$. Da $f''(1) = -2$, liegt tatsächlich ein Hochpunkt vor.