Mathematik: **Abitur**
Bundesland: **Baden-Württemberg** (berufliches Gymnasium)
Bereich: Analysis – Differentialrechnung
Thema: Krümmung und Wendestellen

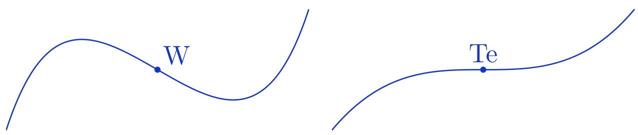
Theorie

Das Schaubild der Funktion f ist an der Stelle u

- rechtsgekrümmt, wenn gilt: $f''(u) < 0$
- linksgekrümmt, wenn gilt: $f''(u) > 0$

Das Schaubild der Funktion f hat an der Stelle u einen

- Wendepunkt $\mathrm{W}(u \mid f(u))$, wenn $f''(u) = 0$ gilt und
  - f'' dort einen Vorzeichenwechsel (VZW) hat
  - **oder** $f'''(u) \neq 0$.
- Terrassenpunkt $\mathrm{Te}(u \mid f(u))$, wenn zusätzlich $f'(u) = 0$ gilt.



(a) Wendepunkt (b) Terrassenpunkt

Abbildung 1: Mögliches Aussehen der Punkte $\mathrm{P}(u \mid f(u))$ mit $f''(u) = 0$

Aufgaben zum Abi-Check

• **1.** Berechnen Sie die Wendepunkte des Schaubildes K_f der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ exakt und geben Sie die Bereiche an, in denen K_f links- bzw. rechtsgekrümmt ist. Zeichnen Sie K_f.

•• **2.** Das Schaubild einer Funktion f verläuft durch den Wendepunkt $\mathrm{W}(3 \mid 2)$ und den Terrassenpunkt $\mathrm{Te}(-1 \mid 0)$. Tim stellt anhand dieses Textes vier Bedingungen für die Funktion auf:

- $f(2) = 3$
- $f''(3) = 0$
- $f(-1) = 0$
- $f''(-1) = 0$

Sind alle Bedingungen richtig? Sind alle Informationen verarbeitet? Falls nein, verbessern Sie bzw. ergänzen Sie fehlende Bedingungen!

••• **3.** Für welche Werte von a und b hat das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2$ den Wendepunkt $\mathrm{W}(1 \mid \frac{1}{3})$? Berechnen Sie exakt.

Lösungen

1. Schaubild siehe Abb. 2. Wir berechnen $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$, $f'''(x) = 6$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Es gilt $f'''(1) = 6 \neq 0$ und $f(1) = 2$.

	$x \in (-\infty;\ 1)$	$x = 1$	$x \in (1;\ \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	↻	W(1 | 2)	↺

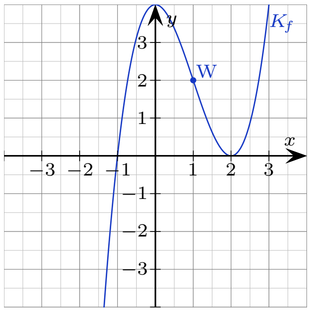


Abbildung 2: Schaubild zu Aufgabe 1

2. Die erste Bedingung ist falsch, da x- und y-Wert vertauscht wurden. Richtig wäre die Bedingung $f(3) = 2$. Die anderen Bedingungen sind richtig. Da Te$(-1 \mid 0)$ ein Terrassenpunkt ist, fehlt allerdings noch die Bedingung $f'(-1) = 0$.

3. Wir berechnen $f''(x) = 6ax + 2b$. Aus den Bedingungen $f(1) = \frac{1}{3}$ und $f''(1) = 0$ erhalten wir ein lineares Gleichungssystem bestehend aus den Gleichungen $6a + 2b = 0$ und $a + b = \frac{1}{3}$. Die Werte $a = -\frac{1}{6}$ und $b = \frac{1}{2}$ lösen das Gleichungssystem. Somit erhalten wir die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$. Da $f'''(1) = -1 \neq 0$, liegt tatsächlich ein Wendepunkt vor.