Theorie

Unter einer Kurvendiskussion verstehen wir die Untersuchung des Schaubilds einer Funktion auf seine geometrischen Eigenschaften. Um eine Kurvendiskussion für eine Funktion f zu erstellen, müssen mehrere Schritte durchgeführt werden. Mit diesen erhält man das volle Verständnis über den genauen Verlauf und die charakteristischen Punkte von f.

- Untersuchung der Symmetrie
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
  - Schnittpunkte mit x-Achse: Wir setzen $f(x) = 0$.
  - Schnittpunkt mit y-Achse: Wir berechnen $f(0)$.
- Bestimmung der Extrempunkte: Wir setzen $f'(x) = 0$.
- Bestimmung der Wendepunkte: Wir setzen $f''(x) = 0$.
- Zeichnen des Schaubildes, wobei alle charakteristischen Punkte zu erkennen sein müssen!

Aufgaben zum Abi-Check

●●● **1.** Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion f mit $f(x) = 16(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x})$ durch und zeichnen Sie dann das Schaubild von f.

Lösungen

1. • *Symmetrie*: Es gilt

$$f(-x) = 16(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}), \quad -f(x) = -16(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}) \Rightarrow f(x) \neq f(-x) \text{ und } f(-x) \neq -f(x),$$

somit ist die Funktion weder symmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

- *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen*: Wir berechnen $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (einfach). Somit erhalten wir den Schnittpunkt N$(0 \mid 0)$ mit der x-Achse. Da $f(0) = 0$, ist N$(0 \mid 0)$ zugleich der Schnittpunkt mit der y-Achse.

- *Bestimmung der Extrempunkte*: Für die Ableitungen gilt

$$f'(x) = 32\mathrm{e}^{2x} - 16\mathrm{e}^{x} = 16\mathrm{e}^{x}(2\mathrm{e}^{x} - 1), \qquad f''(x) = 64\mathrm{e}^{2x} - 16\mathrm{e}^{x} = 16\mathrm{e}^{x}(4\mathrm{e}^{x} - 1).$$

  Wir berechnen $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\ln 2$. Dann gilt $f''(-\ln 2) = 8 > 0$, $f(-\ln 2) = -4 \Rightarrow$ lokaler Tiefpunkt T$(-\ln 2 \mid -4)$.

- *Bestimmung der Wendepunkte*: Wir berechnen $f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\ln 4$, $f(-\ln 4) = -3$, zudem hat f'' in $x = -\ln 4$ einen Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ Wendepunkt $\mathrm{W}_1(-\ln 4 \mid -3)$.

- *Zeichnen des Schaubildes*: Nun können wir das Schaubild der Funktion zeichnen (→ Abb. 1).

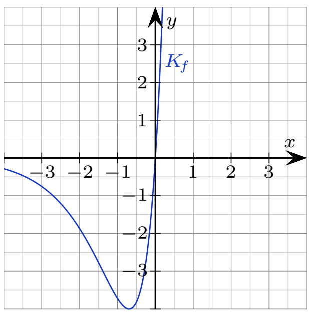

Abbildung 1: Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 16(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x})$