Theorie

Unter einer Kurvendiskussion verstehen wir die Untersuchung des Schaubilds einer Funktion auf seine geometrischen Eigenschaften. Um eine Kurvendiskussion für eine Funktion f zu erstellen, müssen mehrere Schritte durchgeführt werden. Mit diesen erhält man das volle Verständnis über den genauen Verlauf und die charakteristischen Punkte von f.

- Untersuchung der Symmetrie
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
  - Schnittpunkte mit x-Achse: Wir setzen $f(x) = 0$.
  - Schnittpunkt mit y-Achse: Wir berechnen $f(0)$.
- Bestimmung der Extrempunkte: Wir setzen $f'(x) = 0$.
- Bestimmung der Wendepunkte: Wir setzen $f''(x) = 0$.
- Zeichnen des Schaubildes, wobei alle charakteristischen Punkte zu erkennen sein müssen!

Aufgaben zum Abi-Check

••• **1.** Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion f mit $f(x) = 2 - \sin(\frac{3}{2}x)$ für $x \in [0;\, \frac{4}{3}\pi)$ durch und zeichnen Sie dann das Schaubild von f.

Lösungen

1.

- *Symmetrie*: Es gilt

$$f(-x) = 2 + \sin(\frac{3}{2}x), \quad -f(x) = -2 + \sin(\frac{3}{2}x) \Rightarrow f(x) \neq f(-x) \text{ und } f(-x) \neq -f(x),$$

somit ist die Funktion weder symmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

- *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen*: Kein Schnittpunkt mit der x-Achse, da $\sin(\frac{3}{2}x) \in [-1;\ 1]$ und somit $f(x) \in [1;\ 3]$. Da $f(0) = 2$, ist $S(0 \mid 2)$ der Schnittpunkt mit der y-Achse.

- *Bestimmung der Extrempunkte*: Für die Ableitungen gilt

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\cos(\frac{3}{2}x), \qquad f''(x) = \frac{9}{4}\sin(\frac{3}{2}x).$$

Wir berechnen $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}\pi$ bzw. $x_2 = \pi$. Es gilt $f''(\frac{1}{3}\pi) = \frac{9}{4} > 0$, $f(\frac{1}{3}\pi) = 1 \Rightarrow$ lokaler Tiefpunkt $T(\frac{1}{3}\pi \mid 1)$. Es gilt $f''(\pi) = -\frac{9}{4} < 0$, $f(\pi) = 3 \Rightarrow$ lokaler Hochpunkt $H(\pi \mid 3)$

- *Bestimmung der Wendepunkte*: Wir berechnen $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ bzw. $x_2 = \frac{2}{3}\pi$, $f(0) = 2$, $f(\frac{2}{3}\pi) = 2$, zudem hat f'' in $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{3}\pi$ einen Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ Wendepunkte $W_1(0 \mid 2)$ bzw. $W_2(\frac{2}{3}\pi \mid 2)$.

- *Zeichnen des Schaubildes*: Nun können wir das Schaubild der Funktion zeichnen (→ Abb. 1).

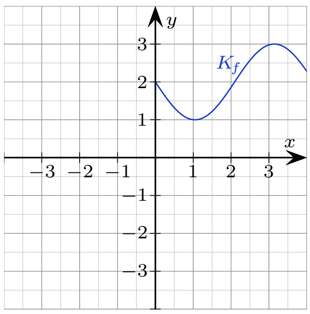

Abbildung 1: Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2 - \sin(\frac{3}{2}x)$