Aufgaben zum Abi-Check

• **1.** Es ist die Ebene $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte für $(s,t) \in \{(-2,-4);\ (-1,-2);\ (-1,1);\ (2,-2);\ (2,1);\ (2,4)\}$ in der Ebene an.

(b) Zeichnen Sie die Ebene in ein geeignetes Koordinatensystem.

(c) Prüfen Sie, ob der Punkt P(0 | 7 | 2) in der Ebene enthalten ist.

•• **2.** Es sind die vier Punkte A(1 | 3 | 1), B(2 | 2 | −4), C(3 | 1 | 1) und D(4 | 0 | 1) gegeben. Zeigen Sie, dass A, B, C und D auf einer gemeinsamen Ebene liegen.

•• **3.** Ermitteln Sie für die Ebene E sowohl die Spurpunkte mit den Koordinatenachsen als auch die Spurgeraden mit den Koordinatenebenen.

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}$$

Lösungen

1. (a) $P_{(-2,-4)}(0 \mid 0 \mid 6)$, $P_{(-1,-2)}(0 \mid 3 \mid 3)$, $P_{(-1,1)}(3 \mid 0 \mid 3)$, $P_{(2,-2)}(0 \mid 6 \mid 0)$, $P_{(2,1)}(3 \mid 3 \mid 0)$, $P_{(2,4)}(6 \mid 0 \mid 0)$

(b) Schaubild siehe Abb. 1.

(c) Wir setzen den Punkt in die Ebene ein und erhalten ein LGS bestehend aus I: $2 + t = 0$, II: $2 + s - t = 7 \Rightarrow s = 3, t = -2$. Wir setzen s und t in III ein: $2 + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = -1 \neq 2$. Somit liegt P nicht in E.

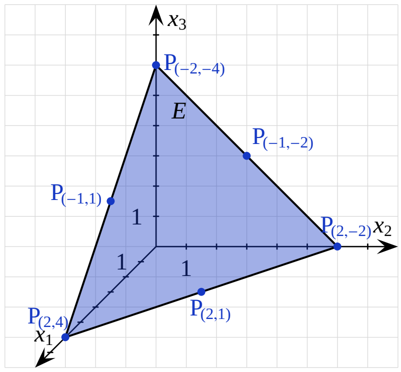

Abbildung 1: Schaubild zu Aufgabe 1

2. Wir stellen zunächst die Ebene durch die Punkte A, B und C auf:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir setzen D in E ein: I: $1 + s + 2t = 4$, II: $3 - s - 2t = 0$, III: $1 - 5s = 1$. Das LGS ist eindeutig lösbar mit $s = 0$, $t = -\frac{3}{2} \Rightarrow D \in E$.

3. *Spurpunkte*: x_1-Achse ($x_2 = x_3 = 0$): II: $4+4s = 0$, III: $2-2s+2t = 0 \Rightarrow s = -1, t = -2 \Rightarrow S_1(-5 \mid 0 \mid 0)$, x_2-Achse ($x_1 = x_3 = 0$): I: $5 + 5t = 0$, III: $2 - 2s + 2t = 0 \Rightarrow s = 0, t = -1 \Rightarrow S_2(0 \mid 4 \mid 0)$, x_3-Achse ($x_1 = x_2 = 0$): I: $5 + 5t = 0$, II: $4 + 4s = 0 \Rightarrow s = -1, t = -1 \Rightarrow S_3(0 \mid 0 \mid 2)$. *Spurgeraden*: x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$): III: $2 - 2s + 2t = 0 \Rightarrow s = t + 1 \Rightarrow g_{12}$. x_1x_3-Ebene ($x_2 = 0$): II: $4 + 4s = 0 \Rightarrow s = -1 \Rightarrow g_{13}$. x_2x_3-Ebene ($x_1 = 0$): I: $5 + 5t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow g_{23}$. Wir erhalten:

$$g_{12} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_{13} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_{23} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$