Intensivkurs Mathematik

Aufgaben zum Abi-Check

• **1.** Der Punkt P(4 | 1 | 2) wird an einem der angegebenen geometrischen Objekte gespiegelt. Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes P′.

(a) Z(3 | −2 | 5)

(b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $E\colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -11$

Lösungen

1. (a)

$$\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PZ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{P}'(2 \mid -5 \mid 8)$$

(b) Wir stellen eine Ebene E auf, die senkrecht zu g ist. E: $2x_2 + 3x_3 = c$. Zudem muss sie den Punkt P enthalten: $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = c \Rightarrow c = 8 \Rightarrow E$: $2x_2 + 3x_3 = 8$. Dann berechnen wir den Schnittpunkt F der Ebene E mit der Geraden g: $2(2 + 2t) + 3(10 + 3t) = 8 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \text{F}(1 \mid -2 \mid 4)$. Dann erhalten wir

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{P}'(-2 \mid -5 \mid 6).$$

(c) Wir setzen einen allgemeinen Punkt $\text{F}_t(4 + 2t \mid 1 + t \mid 2 - 3t)$ auf der Lotgerade in die Ebene ein: $2(4 + 2t) + (1 + t) - 3(2 - 3t) = -11 \Rightarrow t = -1$. Somit erhalten wir den Lotfußpunkt $\text{F}(2 \mid 0 \mid 5)$. Dann gilt

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{P}'(0 \mid -1 \mid 8).$$