Theorie

Sei $f\colon [a;\ b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare nichtnegative Funktion. Dann bezeichnet das *bestimmte Integral*

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f mit der x-Achse einschließt, wobei wir a und b als *Integrationsgrenzen* bezeichnen (→ Abb. 1).

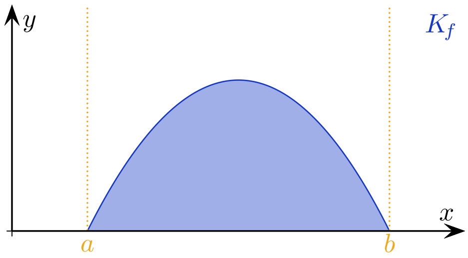

Abbildung 1: Fläche A mit Grenzen a und b

Aufgaben zum Abi-Check

• **1.** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild K_f von $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$ für $x \in [2;\ 4]$ mit der x-Achse einschließt.

•• **2.** In Abb. 2 ist das Schaubild K einer Funktion f eingezeichnet. Überprüfen Sie durch Schätzen des Flächeninhalts, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x > 4$ (b) $\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x > 6$

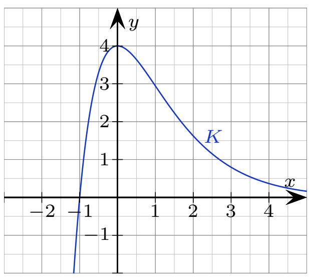

Abbildung 2: Schaubild zu Aufgabe 2

••• **3.** Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ sowie den y-Achsenabschnitt 3. Zudem schließt es mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten eine Fläche mit dem Inhalt $A = 8{,}25$ ein. Bestimmen Sie den Funktionsterm von f.

Lösungen

1. Wir bestimmen eine Stammfunktion F von f. $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x$. Dann setzen wir die obere und untere Grenze in das bestimmte Integral ein und berechnen den konkreten Zahlenwert. $a = 2$, $b = 4$. Wir berechnen

$$A = \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x\right]_2^4$$
$$= \left(-\frac{1}{6}\cdot 4^3 + \frac{3}{2}\cdot 4^2 - \frac{5}{2}\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{6}\cdot 2^3 + \frac{3}{2}\cdot 2^2 - \frac{5}{2}\cdot 2\right) = \frac{10}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3} \approx 3{,}67\,.$$

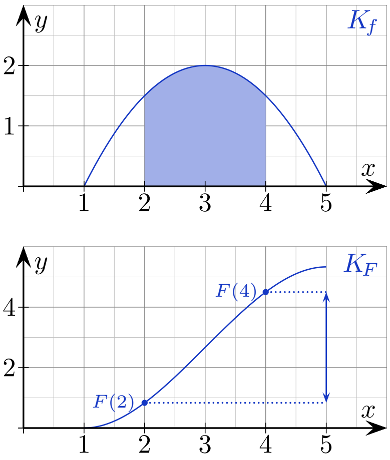

Abbildung 3: Berechnung des Flächeninhaltes

2. (a) Diese Aussage ist falsch, da die Fläche komplett von einem Rechteck mit den Eckpunkten P(−1 | 0), Q(−1 | 4), R(0 | 4) und S(0 | 0) und dem Flächeninhalt 4 umschlossen ist.

(b) Diese Aussage ist richtig, da in der Fläche ein Dreieck mit den Eckpunkten P(0 | 0), Q(0 | 4) und R(3 | 0) mit Flächeninhalt 6 enthalten ist.

3. Wir schreiben $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und berechnen: I: $f(0) = 3 \Rightarrow d = 3$. Außerdem gilt II: $f(3) = 0 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + 3 = 0$, sowie III: $f(-3) = 0 \Rightarrow -27a + 9b - 3c + 3 = 0$. Durch Addition beider Gleichungen erhalten wir $18b + 6 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$. Lösen wir II nach c auf, so erhalten wir $c = -9a$ und somit $f(x) = ax^3 - \frac{1}{3}x^2 - 9ax + 3$. Die letzte Bedingung liefert

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 ax^3 - \frac{1}{3}x^2 - 9ax + 3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}ax^4 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{9}{2}ax^2 + 3x\right]_0^3$$
$$= \left(\frac{81}{4}a - 3 - \frac{81}{2}a + 9\right) - 0 = -\frac{81}{4}a + 6 = 8{,}25 \Rightarrow a = -\frac{1}{9} \Rightarrow c = 1\,.$$

Somit gilt: $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + x + 3$.