Theorie

Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt für die Integralfunktion A, dass

(a) $A'(x) = f(x)$

(b) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Das bestimmte Integral gibt die *Flächenbilanz* zwischen den oberhalb und unterhalb der x-Achse gelegenen Flächenstücken an.

Aufgaben zum Abi-Check

• **1.** Das Schaubild K der Funktion f mit $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ schließt mit der x-Achse mehrere Flächenstücke ein. Zeichnen Sie zunächst K und markieren Sie die angegebenen Flächen. Berechnen Sie dann ihren Gesamtinhalt.

•• **2.** In Abb. 1 ist das Schaubild K_f einer Funktion f eingezeichnet. Überprüfen Sie durch Schätzen des Flächeninhalts, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ (b) $\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x < 2$ (c) $\int_{-1}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x > 1$

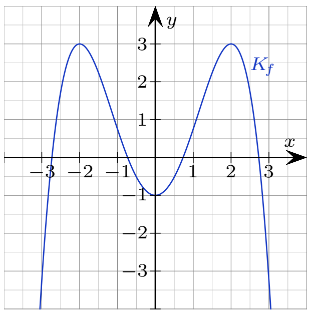

Abbildung 1: Schaubild zu Aufgabe 2

••• **3.** Geben Sie diejenigen Parabeln an, die mit der x-Achse zwischen den Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ eine Fläche mit dem Inhalt $A = 7{,}5$ einschließen.

Lösungen

1. Schaubild siehe Abb. 2. Wir berechnen $f(x) = x(x+1)(x-2)$, Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + c$, $A_1 = |F(0) - F(-1)| = |0 - (-\frac{5}{12})| = \frac{5}{12}$, $A_2 = |F(2) - F(0)| = |-\frac{8}{3} - 0| = \frac{8}{3}$, $A = A_1 + A_2 = \frac{37}{12}$

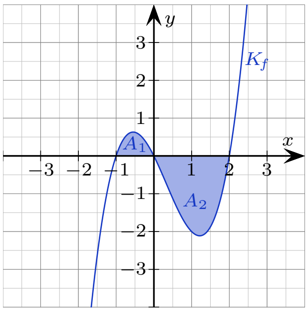

Abbildung 2: Schaubild zu Aufgabe 1

2. (a) Diese Aussage ist falsch, da größere Flächenteile unterhalb der x-Achse liegen als oberhalb.

(b) Diese Aussage ist richtig, da der Flächenteil unterhalb der Gerade $y = 0$ etwas größer ist als der Flächenteil oberhalb der Gerade $y = 2$.

(c) Diese Aussage ist falsch. Der Flächenteil zwischen $x = -2$ und $x = -1$ ist zwar positiv, jedoch ist der Integralwert negativ, da die Integrationsgrenzen vertauscht wurden.

3. Wir schreiben $f(x) = a(x+1)(x-2)$. Somit muss gelten: $\int_{-1}^{2} a(x+1)(x-2)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x]_{-1}^{2} = 4{,}5a = 7{,}5 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$.