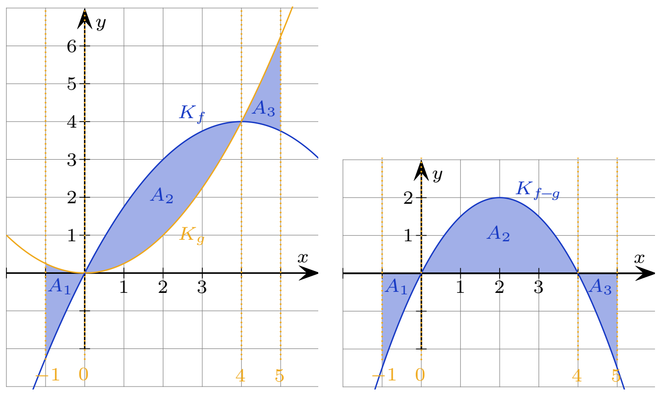
Theorie

Mit Hilfe der Integralrechnung können wir nicht nur Inhalte von Flächen berechnen, die von einer Seite durch die x-Achse begrenzt werden, sondern auch von Flächen, die von oben und unten durch zwei Kurven begrenzt sind.

Aufgaben zum Abi-Check

•• **1.** Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche, welche durch die Schaubilder der Funktionen f und g mit $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ zwischen den Stellen $x = -1$ und $x = 5$ begrenzt wird (→ Abb. 1a).



(a) Flächen zwischen K_f und K_g

(b) Flächen zwischen K_{f-g} und der x-Achse

Abbildung 1: Berechnung des Inhaltes von Flächen zwischen zwei Kurven

Lösungen

1. Zunächst stellen wir fest, dass sich beide Schaubilder an den Stellen $x = 0$ und $x = 4$ schneiden und die Fläche in drei Teile mit den Inhalten A_1, A_2 und A_3 teilen (→ Abb. 1a). Wir führen unser Problem nun auf ein bereits bekanntes zurück, denn wir sehen, dass der Inhalt der Fläche A_1, A_2 und A_3 zwischen f und g genau dem Inhalt der Flächen zwischen der Differenzfunktion $f - g$ und der x-Achse entspricht (→ Abb. 1b). Hierbei müssen wir lediglich aufpassen, dass die Werte der einzelnen Integrale unterschiedliche Vorzeichen haben:

A_1 und A_3: negatives Vorzeichen (f ist kleiner als g)
A_2: positives Vorzeichen (f ist größer als g)

Also gehen wir folgendermaßen vor:

1. Wir bestimmen die Differenzfunktion $f - g$.

$$f(x) - g(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 - \left(-\frac{1}{4}x^2\right) = 2x - \frac{1}{2}x^2$$

2. Wir berechnen die Nullstellen der Differenzfunktion (= Schnittstellen von f und g), welche die Gesamtfläche in mehrere Teilflächen $A_1, A_2, \ldots$ teilen.

$$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ bzw. } x = 4$$

3. Wir berechnen die Inhalte der einzelnen Teilflächen $A_1, A_2, \ldots$ und ändern das Vorzeichen, wenn ein Integralwert negativ ist.

$$\int_{-1}^{0} 2x - \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_{-1}^{0} = -\frac{7}{6} \Rightarrow A_1 = \frac{7}{6}$$
$$\int_{0}^{4} 2x - \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_{0}^{4} = \frac{16}{3} \Rightarrow A_2 = \frac{16}{3}$$
$$\int_{4}^{5} 2x - \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_{4}^{5} = -\frac{7}{6} \Rightarrow A_3 = \frac{7}{6}$$

4. Wir berechnen die Gesamtfläche $A = A_1 + A_2 + \ldots$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{23}{3}.$$