Theorie

Liegt ein lineares Gleichungssystem bzw. die dazugehörige Koeffizientenmatrix in oberer Dreiecksform (*Stufenform*) vor, dann ist die Lösung durch *Rückwärtseinsetzen* leicht zu bestimmen. Unser Ziel ist es nun, jedes lineare Gleichungssystem in die Stufenform umzuformen. Hier hilft uns das *Gauß-Verfahren*. Bei diesem wird die erweiterte Koeffizientenmatrix Spalte für Spalte mit Hilfe von *Gauß-Schritten* in Stufenform gebracht. Dabei müssen alle Zahlen unter den Diagonalelementen den Wert 0 annehmen. In einem Gauß-Schritt sind folgende Äquivalenzumformungen erlaubt:

- Zeilen untereinander vertauschen (z.B. I $\leftrightarrow$ II)
- eine Zeile mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren (z.B. $2 \cdot \mathrm{I}$)
- eine Zeile mit einer anderen Zeile (oder einem Vielfachen) addieren bzw. von ihr subtrahieren (z.B. $\mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}$)

Aufgaben zum Abi-Check

• **1.** Ergänzen Sie die fehlenden Werte.

(a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 9 & 17 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-4\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ \square & \square & \square & 6 \\ \square & 1 & \square & \square \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot\mathrm{III}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & \square & \square & 6 \\ 0 & \square & 2 & \square \end{array}\right)$$

(b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -4 & 8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\square \\ \square}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 10 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\square} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 17 \end{array}\right)$$

•• **2.** Berechnen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \end{array}$$

Lösungen

1. (a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 9 & 17 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-4\cdot\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -4 & 8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+2\cdot\text{I}]{2\cdot\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 10 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 17 \end{array}\right)$$

2. $\mathbb{L} = \{(1;\ 2;\ 3)\}$. Lösungsweg:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-3\cdot\text{I}]{\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+4\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right)$$

Wir lösen III nach x_3 auf: $-13x_3 = -39 \Rightarrow x_3 = 3$. Wir setzen x_3 in II ein: $x_2 - 3 \cdot 3 = -7 \Rightarrow x_2 = 2$. Wir setzen x_2, x_3 in I ein: $x_1 + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x_1 = 1$.