Theorie

Die Anzahl der Stufen einer Matrix $\mathbf{A}$ nach der Durchführung des Gauß-Verfahrens nennen wir den *Rang* der Matrix. Wir bezeichnen ihn mit $r = \mathrm{rg}\mathbf{A}$.
Es ist ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Gilt nach der Durchführung des Gauß-Verfahrens

(a) $\mathrm{rg}\mathbf{A} < \mathrm{rg}(\mathbf{A} \mid \vec{b})$, so ist das lineare Gleichungssystem *unlösbar*;

(b) $\mathrm{rg}\mathbf{A} = \mathrm{rg}(\mathbf{A} \mid \vec{b})$ und $\mathrm{rg}\mathbf{A} = n$, so ist das lineare Gleichungssystem *eindeutig lösbar*;

(c) $\mathrm{rg}\mathbf{A} = \mathrm{rg}(\mathbf{A} \mid \vec{b})$ und $\mathrm{rg}\mathbf{A} < n$, so ist das lineare Gleichungssystem *mehrdeutig lösbar* mit $n - r$ Parametern.

Aufgaben zum Abi-Check

•• **1.** Prüfen Sie, ob das lineare Gleichungssystem mehrdeutig lösbar oder unlösbar ist. Geben Sie im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit die Lösungsmenge an. *Hinweis:* Ein lineares Gleichungssystem heißt *unterbestimmt*, wenn es weniger Gleichungen als Unbekannte hat.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & -5 \\ 4x_1 & - & 15x_2 & - & 13x_3 & = & 9 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ 3x_1 & + & 13x_2 & + & 10x_3 & = & 29 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

••• **2.** In Abb. 1 sollen die fehlenden natürlichen Zahlen so ergänzt werden, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile und jeder Spalte genau 60 beträgt.

(a) Berechnen Sie eine allgemeine Lösung für dieses Zahlenrätsel mit Hilfe eines geeigneten linearen Gleichungssystems.

(b) Wie viele verschiedene Lösungen gibt es?

(c) Finden Sie eine Lösung, so dass die Summe der Zahlen in jeder Diagonale ebenfalls 60 beträgt.

	16	
18	20	22
	24	

Abbildung 1: Zahlenquadrat aus Aufgabe 2

Lösungen

1. (a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 7 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -5 \\ 4 & -15 & -13 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+2\cdot\text{I}]{2\cdot\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -12 \\ 0 & -1 & -7 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es gilt: $\text{rg}\mathbf{A} = 2$, $\text{rg}(\mathbf{A} \mid \vec{b}) = 3 \Rightarrow$ das LGS ist unlösbar.

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 9 \\ 3 & 13 & 10 & 29 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-3\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es gilt: $n = 3$ Unbekannte, $\text{rg}\mathbf{A} = 2$, $\text{rg}(\mathbf{A} \mid \vec{b}) = 2 \Rightarrow$ das LGS ist mehrdeutig lösbar (1 Parameter). Wir setzen $x_3 = t$. Wir setzen x_3 in II ein: $x_2 + t = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - t$. Wir setzen x_2, x_3 in I ein: $x_1 + 4(2 - t) + 3t = 9 \Rightarrow x_1 = 1 + t$. Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(1 + t;\ 2 - t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2. (a) Legen wir die gesuchten Zahlen wie in Abb. 2a fest, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & + & 16 & = & 60 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & + & 18 & = & 60 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & + & 22 & = & 60 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & 24 & = & 60 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 44 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 42 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 38 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 36 \end{array}$$

Wir berechnen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 44 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 38 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 44 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 38 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 44 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 44 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es gilt: $n = 4$ Unbekannte, $\text{rg}\mathbf{A} = 3$, $\text{rg}(\mathbf{A} \mid \vec{b}) = 3 \Rightarrow$ das LGS ist mehrdeutig lösbar (1 Parameter). Wir setzen $x_4 = t$ in III ein: $x_3 + t = 36 \Rightarrow x_3 = 36 - t$. Wir setzen x_3 in II ein: $-x_2 + (36 - t) = -2 \Rightarrow x_2 = 38 - t$. Wir setzen x_2 in I ein: $x_1 + (38 - t) = 44 \Rightarrow x_1 = 6 + t$. Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(6 + t;\ 38 - t;\ 36 - t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(b) Damit jede Komponente eine positive ganze Zahl ist, müssen 4 Bedingungen gelten: $6 + t \geq 1$, $38 - t \geq 1$, $36 - t \geq 1$ und $t \geq 1$. Insgesamt erhalten wir $t \in \{1; \ldots; 35\}$. Wir können das Quadrat also auf 35 verschiedene Arten ausfüllen.

(c) Es muss gelten: $x_1 + x_4 + 20 = x_2 + x_3 + 20 = 60$, also $(6+t)+t+20 = (38-t)+(36-t)+20 \Rightarrow t = 17$, siehe Abb. 2b.

x_1	16	x_2
18	20	22
x_3	24	x_4

(a) allgemeiner Ansatz

23	16	21
18	20	22
19	24	17

(b) spezielle Lösung

Abbildung 2: Lösungsskizzen zu Aufgabe 2