Aufgaben zum Abi-Check

• **1.** Überprüfen Sie durch Rechnung, ob die Vektoren linear abhängig sind.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

•• **2.** Ergänzen Sie den fehlenden Wert, so dass die Vektoren linear abhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ \square \end{pmatrix}$

Lösungen

1. (a) Wir suchen einen Wert für k, so dass gilt: $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$. Wir lösen I nach k auf: $\frac{1}{15} = 2k \Rightarrow k = \frac{1}{30}$. Wir setzen k in II ein: $-\frac{1}{6} = \frac{1}{30} \cdot (-5)$ (wahre Aussage). Wir setzen k in III ein: $\frac{1}{10} = \frac{1}{30} \cdot 3$ (wahre Aussage). Somit sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig.

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot\mathrm{III}-\mathrm{I}]{3\cdot\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}+16\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist eindeutig lösbar $\Rightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig.

2. (a) Wir suchen einen Wert für k, so dass beide Vektoren Vielfache sind. Wir lösen III nach k auf: $-2 = k \cdot 1 \Rightarrow k = -2$. Wir setzen k in II ein: $0 = 0$ (wahre Aussage). Wir setzen k in I ein: $x_1 = (-2) \cdot 3 \Rightarrow x_1 = -6$.

(b) Wir berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 16 & 0 \\ 1 & -2 & x_3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & x_3-7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-11 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar für $x_3 = 11$. Dann sind die drei Vektoren linear abhängig.