

1 Zahlenmengen

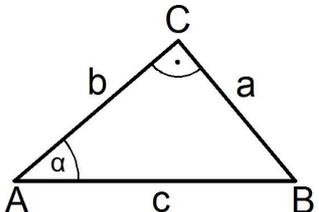
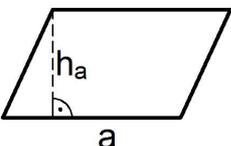
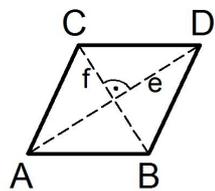
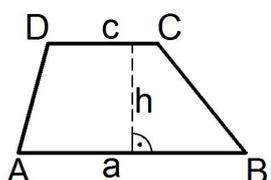
$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

2 Geometrie

Ebene Figuren

A: Fläche

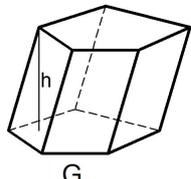
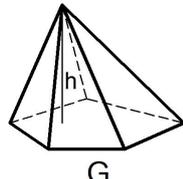
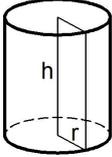
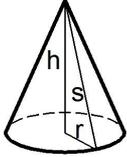
U: Umfang

Dreieck $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$		
Rechtwinkliges Dreieck Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$		
		
Parallelogramm $A = a \cdot h_a$ 	Raute $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ 	Trapez $A = \frac{1}{2} \cdot (a+c) \cdot h$ 
Kreis $A = \pi \cdot r^2$ $U = 2 \cdot \pi \cdot r$		

Körper

V: Volumen
O: Oberfläche

M: Mantelfläche
G: Grundfläche

Prisma $V = G \cdot h$ 	Pyramide $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ 
Gerader Kreiszylinder $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ 	Gerader Kreiskegel $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ $M = \pi \cdot r \cdot s$ 
Kugel $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	

3 Terme

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Potenzen und Wurzeln

mit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$; $r, s \in \mathbb{R}$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

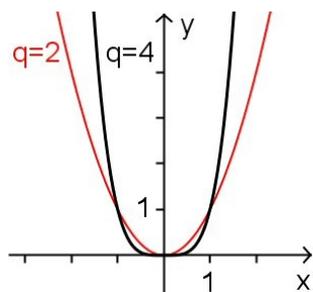
$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$a^0 = 1$$

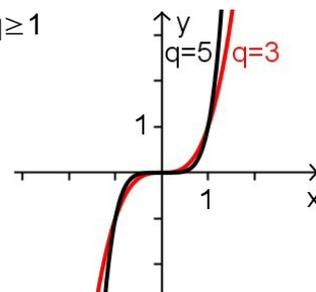
4 Funktionen und zugehörige Gleichungen

Potenzfunktion mit $f(x) = x^q$ mit $q \in \mathbb{Z}^*$

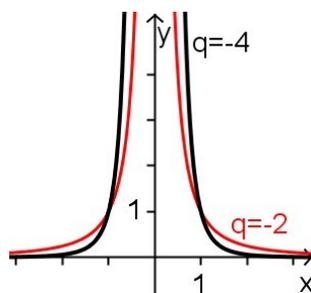
q gerade, $q > 1$



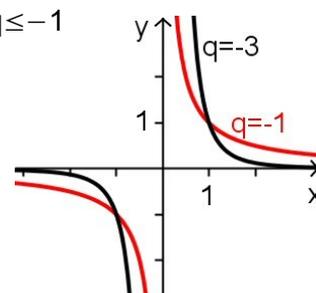
q ungerade, $q \geq 1$



q gerade, $q < -1$



q ungerade, $q \leq -1$



Waagrechte Asymptote $y = 0$

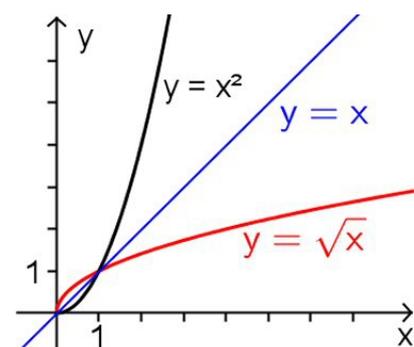
Senkrechte Asymptote $x = 0$

Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Die Potenzfunktion mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ und eingeschränkter Definitionsmenge \mathbb{R}_+ ist umkehrbar.

Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

Das Schaubild von f^{-1} entsteht durch Spiegelung des Schaubildes von f an der 1. Winkelhalbierenden ($y = x$).



Potenzgleichung mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

$$x^n = a \quad a \geq 0 \quad \begin{array}{l} \text{falls } n \text{ gerade} \quad x_{1/2} = \pm \sqrt[n]{a} \\ \text{falls } n \text{ ungerade} \quad x = \sqrt[n]{a} \end{array}$$

$$x^n = a \quad a < 0 \quad \text{falls } n \text{ ungerade} \quad x = -\sqrt[n]{-a}$$

Polynomfunktion n-ten Grades

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$; $a_n \neq 0$

Lineare Funktion

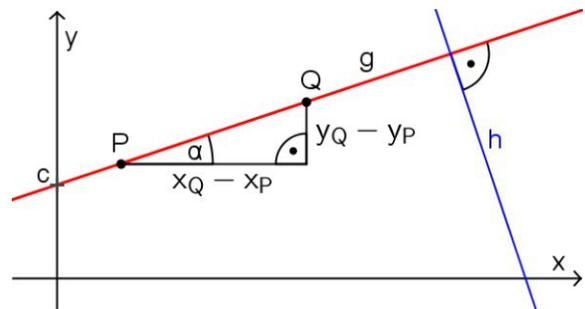
Hauptform $f(x) = mx + c$

Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

Punktsteigungsform $f(x) = m(x - x_P) + y_P$

Steigungswinkel $m = \tan(\alpha)$

Orthogonalität $m_g \cdot m_h = -1 \Rightarrow g \perp h$

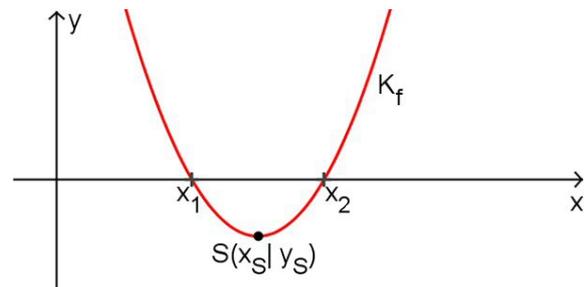


Quadratische Funktion

Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$

Scheitelform $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$

Produktform $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$



Quadratische Gleichung

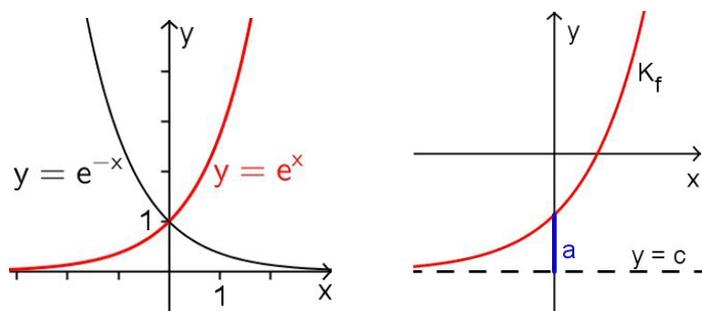
$ax^2 + bx + c = 0$ falls $b^2 - 4ac \geq 0$ $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Exponentialfunktion

$f(x) = a \cdot b^x + c$ mit $a \neq 0$; $b > 0 \wedge b \neq 1$

$f(x) = a \cdot e^{kx} + c$ mit $a \neq 0$; $k \in \mathbb{R}^*$

Asymptote $y = c$



Exponentialgleichung mit $b, y \in \mathbb{R}_+$

$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b(y)$

$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

$b^x = e^{\ln(b) \cdot x}$

$\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$

$e^{\ln(y)} = y$

$\ln(e^x) = x$

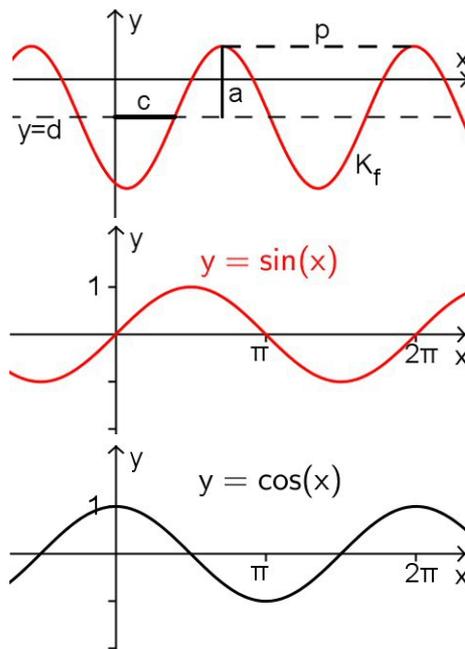
Trigonometrische Funktion

$$f(x) = a \sin(b(x-c)) + d$$

Amplitude $|a|$

Periode $p = \frac{2\pi}{|b|}$

Bogenmaß x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Abbildungen

Das Schaubild von g entsteht aus dem Schaubild von f durch

Spiegelung	an der x -Achse	$g(x) = -f(x)$
	an der y -Achse	$g(x) = f(-x)$
Verschiebung	um c in x -Richtung	$g(x) = f(x-c)$
	um d in y -Richtung	$g(x) = f(x) + d$
Streckung	mit Faktor $\frac{1}{b}$ in x -Richtung	$g(x) = f(b \cdot x)$
	mit Faktor a in y -Richtung	$g(x) = a \cdot f(x)$

5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche/Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_1]$ $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Momentane/Lokale Änderungsrate an der Stelle x_0 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Ableitungsregeln

Summenregel $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Faktorregel $f(x) = a \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot u'(x)$

Produktregel $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

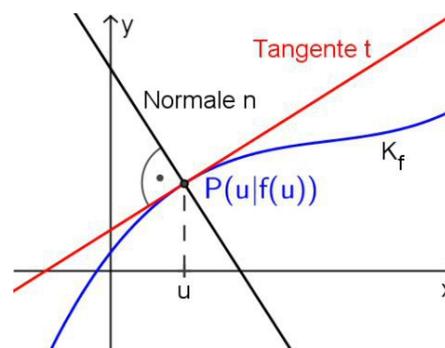
Kettenregel $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $c \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$	$F(x) = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + c$ mit $r \neq -1$
$f(x) = e^{kx}$ mit $k \in \mathbb{R}^*$	$f'(x) = k \cdot e^{kx}$	$F(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + c$
$f(x) = \sin(kx)$ mit $k \in \mathbb{R}^*$	$f'(x) = k \cdot \cos(kx)$	$F(x) = -\frac{1}{k} \cdot \cos(kx) + c$
$f(x) = \cos(kx)$ mit $k \in \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -k \cdot \sin(kx)$	$F(x) = \frac{1}{k} \cdot \sin(kx) + c$

Tangente und Normale

- Tangentensteigung $m_t = f'(u)$
 Tangentengleichung $y = f'(u)(x-u) + f(u)$
 Normalensteigung $m_n = \frac{-1}{f'(u)}$
 Normalengleichung $y = \frac{-1}{f'(u)}(x-u) + f(u)$



Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

mit Definitionsbereich D

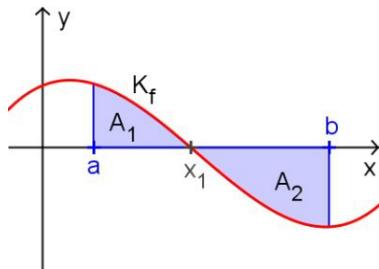
- Symmetrie Achsensymmetrie zur y-Achse $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$
 Punktsymmetrie zum Ursprung $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$
- Monotonie $f'(x) \geq 0$ im Intervall J $\Rightarrow f$ steigt monoton in J
 $f'(x) \leq 0$ im Intervall J $\Rightarrow f$ fällt monoton in J
- Hochpunkt $f'(x_0) = 0$ und VZW +/- von f' bei x_0
 oder $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow K_f$ hat den Hochpunkt $H(x_0|f(x_0))$
- Tiefpunkt $f'(x_0) = 0$ und VZW -/+ von f' bei x_0
 oder $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow K_f$ hat den Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$
- Krümmung $f''(x) > 0$ im Intervall J $\Rightarrow K_f$ ist in J linksgekrümmt
 $f''(x) < 0$ im Intervall J $\Rightarrow K_f$ ist in J rechtsgekrümmt
- Wendepunkt $f''(x_0) = 0$ und VZW von f'' bei x_0
 oder $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow K_f$ hat den Wendepunkt $W(x_0|f(x_0))$

Berechnung bestimmter Integrale

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \text{ wobei } F \text{ eine Stammfunktion von } f \text{ ist.}$$

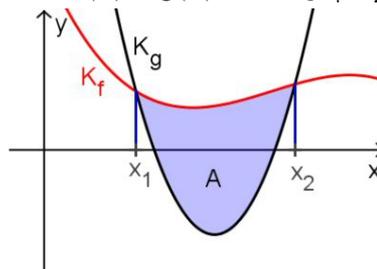
Flächenberechnung

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^{x_1} f(x) dx - \int_{x_1}^b f(x) dx$$



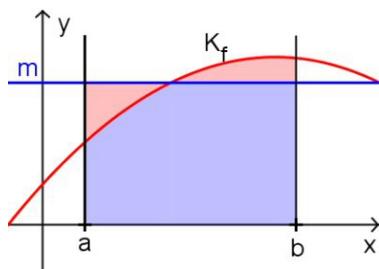
$$A = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx$$

falls $f(x) \geq g(x)$ für $x \in [x_1; x_2]$



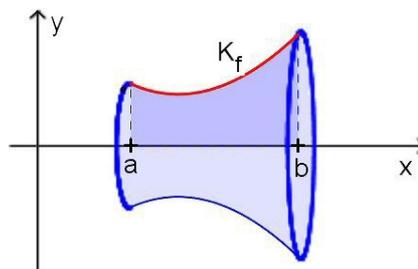
Mittelwert

$$\bar{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



Rotationsvolumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



6 Stochastik

Relative Häufigkeit $h_i = \frac{\text{absolute Häufigkeit der } i\text{-ten Merkmalsausprägung}}{\text{Stichprobenumfang } n}$

Arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$

Median falls n ungerade, mittlerer Wert einer geordneten Datenreihe
falls n gerade, arithmetisches Mittel der beiden in der Mitte stehenden Werte

Modalwert häufigster Wert einer Datenreihe

Ereignis Teilmenge der Ergebnismenge S eines Zufallsexperiments

Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses A

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(S) = 1$$

Gegeneignis \bar{A} $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Laplace-Experiment	Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse (Elementarereignisse) gleich wahrscheinlich sind
Laplace-Wahrscheinlichkeit	$P(A) = \frac{ A }{ S }$
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Stochastisch unabhängige Ereignisse A, B	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Urnenmodelle

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Objekten wird k-mal gezogen.

Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen

- mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge n^k
- ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge $\frac{n!}{(n-k)!}$
- ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge (d. h. mit einem Griff) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Erwartungswert $E(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + x_2 \cdot P(X=x_2) + \dots + x_n \cdot P(X=x_n)$

Varianz $\text{Var}(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + (x_2 - E(X))^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$

Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Binomialverteilung

Zahl der Versuche n, Trefferzahl k, Trefferwahrscheinlichkeit p

Wahrscheinlichkeit $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k) = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=k)$

Erwartungswert $E(X) = \mu = n \cdot p$

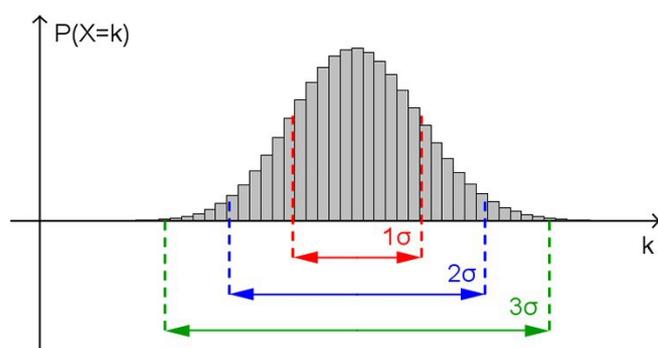
Standardabweichung $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Sigma-Regeln

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68,3\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 95,4\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 99,7\%$$



Näherungsweise bestimmtes Vertrauensintervall für $np(1-p) > 9$

$$\left[h - c \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}; h + c \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \right] \text{ mit } h = \frac{X}{n}$$

90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit $\Rightarrow c = 1,64$

95 % Sicherheitswahrscheinlichkeit $\Rightarrow c = 1,96$

99 % Sicherheitswahrscheinlichkeit $\Rightarrow c = 2,58$

99,9 % Sicherheitswahrscheinlichkeit $\Rightarrow c = 3,29$

Das Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p hat höchstens die Länge l , wenn für den Stichprobenumfang n gilt $n \geq \frac{c^2}{l^2}$.

7 Lineare Algebra

Vektorgeometrie

Mittelpunkt M einer Strecke \overline{AB} $\quad \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

Betrag eines Vektors $\quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Einheitsvektor $\quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \text{ mit } \vec{a} \neq \vec{0}$

Skalarprodukt $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

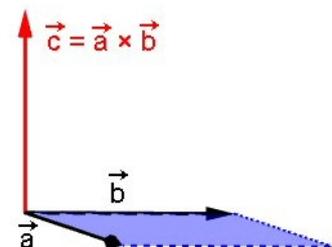
Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\quad \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Orthogonalität $\quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Vektorprodukt $\quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow \vec{c} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{c} \perp \vec{b}$

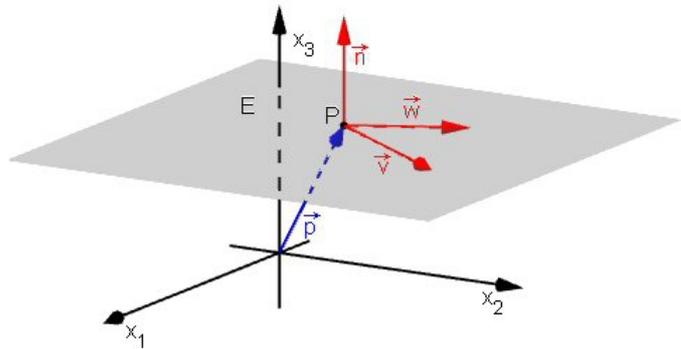
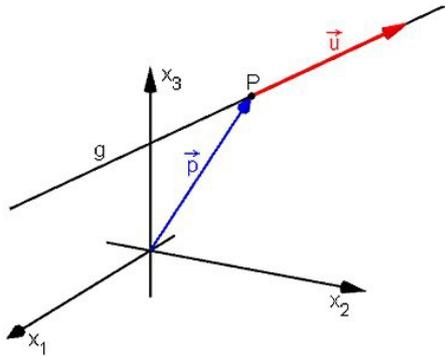


Flächeninhalt eines Parallelogramms $\quad A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Flächeninhalt eines Dreiecks $\quad A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

Gerade und Ebene im Raum

mit Stützvektor \vec{p} , Richtungsvektor \vec{u} , Spannvektoren \vec{v}, \vec{w} und Normalenvektor \vec{n}



Parameterform $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$

Normalenform

Koordinatenform

$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$

$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

$E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = b$ mit $b \in \mathbb{R}$

Winkel

zwischen zwei Geraden

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

zwischen Gerade und Ebene

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

zwischen zwei Ebenen

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Abstand

zwischen zwei Punkten

$$d = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

zwischen Punkt und Ebene

$$d = \frac{|(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \left| \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$$

Matrizen

Addition

Man kann Matrizen nur addieren, wenn sie in ihrer Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen A und B können nur dann miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl von A mit der Zeilenanzahl von B übereinstimmt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$

Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E \cdot A = A \cdot E = A$$

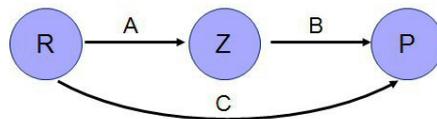
Inverse Matrix

Für eine invertierbare Matrix A und ihre Inverse A^{-1} gilt $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Prozesse

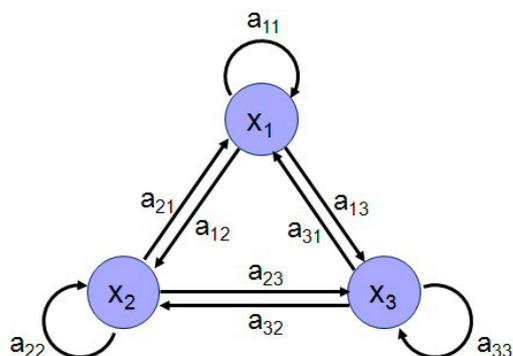
Ausgangszustand R; Zwischenzustand Z; Endzustand P

$$\vec{r} = A \cdot \vec{z} \quad \vec{z} = B \cdot \vec{p} \quad \vec{r} = A \cdot B \cdot \vec{p} = C \cdot \vec{p}$$



Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Aus Zustand \vec{x} wird Zustand \vec{y} $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$

Stochastische Matrix alle Elemente nicht negativ und Spaltensummen gleich 1

Stationärer Zustand \vec{x} $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Zyklischer Prozess $A^k = E$ für ein $k > 1$

Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.