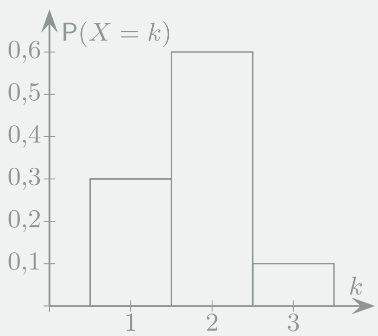
Abitur

Intensivkurs Mathematik

Stochastik

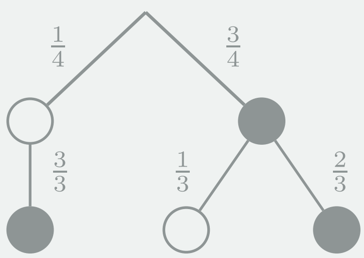
Die optimale Vorbereitung auf das Abitur



$P(C) = \frac{1}{6}$

$\sigma = 5$

$|A| = \binom{7}{2}$



+ Erklärung des gesamten Stoffes
+ Aufgaben auf allen Niveaustufen
+ mit allen Lösungswegen

Florian Timmermann
www.intensivkurs-mathematik.de

http://www.intensivkurs-mathematik.de

1. Auflage, 1. Druck 2016

Druck: WIRmachenDRUCK GmbH, Backnang

ISBN: 978-3-9817902-0-7

Inhaltsverzeichnis

Arbeiten mit dem Buch

Liebe Schüler/innen,

Dieses Buch soll Ihnen die Vorbereitung auf die anstehenden Abiturprüfungen erleichtern, egal aus welchem Bundesland Sie kommen. Es setzt sich aus den folgenden Abschnitten zusammen:

- **Bezeichnungen**: Hier werden die wichtigsten Bezeichnungen und Symbole zusammengefasst.
- **Theorie & Aufgaben**: Nach einem Theorieteil werden jeweils Aufgaben zu dem entsprechenden Thema gestellt. Die Aufgaben unterscheiden sich – wie im Abitur auch – sowohl in den Kompetenzen (bloßes Rechnen, erklären, darstellen, ...) als auch im Schwierigkeitsgrad (● leicht, ●● mittel, ●●● schwer). Alle Aufgaben, die per Hand gerechnet werden müssen, haben **einfache Lösungen**.
- **Lösungen**: Hier stelle ich Ihnen alle Lösungen inklusive der Lösungswege zur Verfügung. Gelegentlich kann es auch alternative Lösungswege geben. Versuchen Sie bitte stets, die Aufgaben zu lösen, ohne einen Blick auf die Lösungen zu werfen. Erst wenn Sie nach zwei Versuchen nicht auf die Lösung kommen, sollten Sie sich diese ansehen.

Einige graphische Elemente sollen Ihnen die Arbeit im Buch zusätzlich erleichtern.

- Die wichtigsten Aufgaben sind rot markiert (z.B. **115.**). Sie bilden den Schwerpunkt der Abiturvorbereitung.
- Bei den mit 🖩 markierten Aufgaben dürfen Sie einen wissenschaftlichen Taschenrechner einsetzen.
- Die mit ★ markierten Aufgaben haben einen Schwierigkeitsgrad über dem Schulniveau und müssen im Abitur nicht beherrscht werden. Mit ihnen können Sie aber einen Blick über den Tellerrand der Schulmathematik werfen.
- Kapitel, die eher selten im Unterricht behandelt werden, sind mit * gekennzeichnet.

Auf der Internetseite

http://www.intensivkurs-mathematik.de

erhalten Sie zusätzliche Informationen sowie eine Übersicht über die weiteren Bücher dieser Reihe.
Nun wünsche ich Ihnen eine erfolgreiche Vorbereitung auf die Abiturprüfungen in Mathematik!

Teil I.

Theorie & Aufgaben

1. Zufallsexperimente

1.1. Einführung

In vielen Bereichen des täglichen Lebens stellen wir fest, dass zahlreiche Beobachtungen unter ähnlichen Bedingungen häufig wiederholt werden können. Bei einigen davon lässt sich das Ergebnis durch mathematische Modelle exakt voraussagen, wie z.B. die Uhrzeit des Sonnenuntergangs an einem bestimmten Ort und Tag. Es gibt jedoch viele Fälle, bei denen unser Wissen nicht ausreicht, um exakte Vorhersagen zu einer einmaligen Beobachtung zu treffen. Dann sprechen wir von einem *Zufallsexperiment*.

Aufgabe

Nennen Sie Beispiele für ein Zufallsexperiment.

Lösung

- Eine Münze wird geworfen. Auf welche Seite fällt sie?
- Welche Lottozahlen werden gezogen?
- Eine Frau wird schwanger. Wird das erwartete Kind ein Junge oder ein Mädchen?
- Bei Kopfschmerzen wird eine Tablette verabreicht. Wirkt sie?

Während wir bei Zufallsexperimenten wie dem Wurf einer Münze keine Vorhersagen für individuelle Ergebnisse treffen können, so ist das sehr wohl für ganze Versuchsreihen mit z.B. 100 Münzwürfen möglich. Um dieses Phänomen zu beschreiben, führen wir ein Experiment mehrfach (n-mal) durch und interessieren uns dafür, ob ein bestimmtes *Ereignis* A eintritt oder nicht.

Definition 1.1 (absolute und relative Häufigkeit):
Den Ausdruck

$$h_n(\mathrm{A}) = \frac{\text{Anzahl der Versuche, in denen A eintritt}}{\text{Anzahl } n \text{ aller Versuche}}$$

bezeichnen wir als *relative Häufigkeit*, den Zähler dieses Bruches als *absolute Häufigkeit* des Ereignisses A.

Es ist klar, dass die Werte von $h_n(\mathrm{A})$ zwischen 0 und 1 liegen. Beobachten wir die Werte $h_n(\mathrm{A})$ für eine wachsende Anzahl n an Versuchen, so stellen wir fest, dass diese Werte einer erstaunlichen Regularität unterliegen.

Satz 1.1 (Empirisches Gesetz der großen Zahlen):
Für große Werte von n strebt der Wert $h_n(\mathrm{A})$ gegen eine bestimmte Zahl $\mathrm{P(A)}$, also $h_n(\mathrm{A}) \to \mathrm{P(A)}$ für $n \to \infty$.

Diesen Wert $\mathrm{P(A)}$ nennen wir die *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A. Auch die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P(A)}$ liegt dann zwischen 0 und 1.

Ein Beispiel zeigt Abb. 1.1, in der die relative Häufigkeit für das Ereignis A = „die Münze fällt auf Kopf“ sukzessive bei einer Versuchsreihe mit Münzwürfen festgehalten wird. Sie strebt gegen den Wert $\frac{1}{2}$.

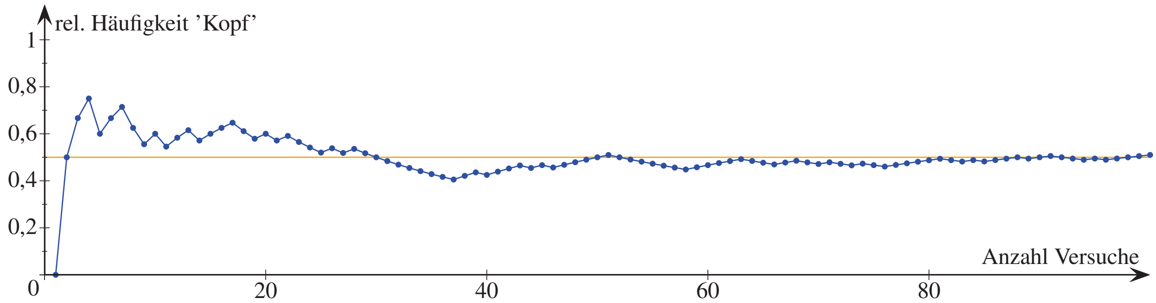


Abb. 1.1.: Relative Häufigkeit des Ereignisses „Kopf“ bei mehrmaligem Münzwurf

Je nachdem, ob ein Experiment nur aus einem Schritt besteht (z.B. einmaliger Wurf eines Würfels) oder aus mehreren (z.B. zweimaliger Wurf einer Münze), so spricht man von einem *einstufigen* bzw. *mehrstufigen* Zufallsexperiment.

Mit dem Wurf eines Würfels stellen wir beispielhaft interessante Fragestellungen vor, die Inhalt dieses Buches sind.

Kapitel 1: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu werfen? Wie oft müssen wir mindestens werfen, damit wir mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine 6 werfen? Wie viele Möglichkeiten gibt es, innerhalb von fünf Würfen genau eine 6 zu werfen? Beeinflusst der Wurf eines Würfels den darauffolgenden Wurf?

Kapitel 2: Wie oft fällt bei drei Würfen im Durchschnitt eine 6? Wie stark variieren die Ergebnisse?

Kapitel 3: Wie oft fällt bei sechzig Würfen im Durchschnitt eine 6? In welchem Intervall erwarten wir bei einer solchen Versuchsreihe die Anzahl geworfener Sechser, so dass wir in 95 % aller Vermutungen richtig liegen?

Kapitel 4: Angenommen, der Würfel wäre gezinkt. In welchem Intervall erwarten wir die wahre Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel bei einmaligem Wurf eine 6 zeigt, wenn wir zuvor Ergebnisse aus sechzig Würfen gesammelt haben?

Kapitel 5: Wie können wir mit einem Test bestimmen, ob ein Würfel gezinkt ist?

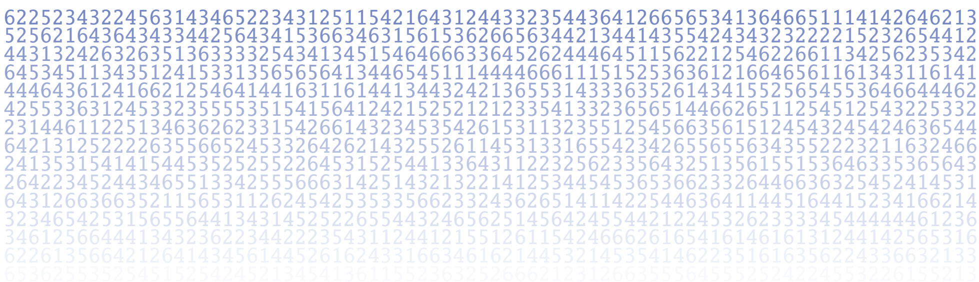


Abb. 1.2.: Simulation vieler Würfe eines Würfels

4. Schätzen unbekannter Wahrscheinlichkeiten

In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass wir ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ergebnissen durchführen. Jedoch kennen wir die Einzelwahrscheinlichkeit nicht. Nun führen wir das Experiment n-mal durch. Dabei handelt es sich um eine Bernoulli-Kette. Einen möglichen Wert für die Einzelwahrscheinlichkeit p können wir durch die *relative Häufigkeit* h schätzen.

Beispiel

Eine Münze wird 40-mal geworfen. Dabei zeigt sie 24-mal auf Kopf. Ist die Münze gezinkt?

KZKZZZKZKKZKKKZKKKKZKKKZZKZKKKKZZZKZKKKZ

Je nach Versuchsreihe erhalten wir unterschiedliche Werte für den Schätzwert h. Der Wert h unterliegt also dem Zufall. Nun wäre es interessant zu wissen, wie *genau* diese Schätzung an dem Wert für p liegt.

Unser Ziel ist es daher, ein um die relative Häufigkeit h symmetrisches *Konfidenzintervall* (*Vertrauensintervall*) $[p_1;\ p_2]$ wie in Abb. 4.1 anzugeben, so dass wir sagen können, der Wert für p liegt mit einer gewissen *Sicherheitswahrscheinlichkeit* (*Vertrauenswahrscheinlichkeit*, *Konfidenzniveau*) γ innerhalb dieser Grenzen. Man sagt dann, der Wert von p ist mit dem Stichprobenergebnis bzw. mit h *verträglich*.

Abb. 4.1.: Konfidenzintervall

Für die Abiturprüfung konzentriert man sich auf eine vereinfachte und angenäherte Version des Konfidenzintervalls. Interessierte können diese Näherung in Aufgabe 186 herleiten.

Satz 4.1 (Konfidenzintervall):
Für eine ausreichend große Stichprobenlänge n ist das (angenäherte) *Konfidenzintervall* zur Vertrauenswahrscheinlichkeit γ durch

$$\left[h - z \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}};\ h - z \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right]$$

gegeben, wobei die Werte für z der Tabelle zu entnehmen sind.

Vertrauenswahrscheinlichkeit γ	68,3 %	90 %	95 %	95,4 %	99 %	99,7 %	99,9 %
z-Wert	1	1,6449	1,9600	2	2,5758	3	3,29

Beispiel

Ermitteln Sie ein Konfidenzintervall für die relative Häufigkeit „Kopf" des obigen Münzwurfs zur Vertrauenswahrscheinlichkeit 90 %.

Lösung

Der z-Wert zu der Vertrauenswahrscheinlichkeit 90 % beträgt $z = 1{,}64$. Wir berechnen die relative Häufigkeit $h = \frac{24}{40} = 0{,}6$ und erhalten das Intervall $[0{,}47;\ 0{,}73]$, da

$$p_{1/2} = h \pm z \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} = 0{,}6 \pm 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot (1-0{,}6)}{40}} \Rightarrow p_1 = 0{,}47,\ p_2 = 0{,}73.$$

Bemerkung: Der Wert $p = \frac{1}{2}$ liegt innerhalb des 90 %-Konfidenzintervalls. Es ist also im Münzwurfexperiment durchaus möglich, dass mit einer echten Münze ein solches Ergebnis entsteht. Genauere Aussagen sind erst bei einer größeren Anzahl von Versuchen sinnvoll.

Satz 4.2 ($\frac{1}{\sqrt{n}}$-Regel):
Die Länge d des (angenäherten) Konfidenzintervalls ist durch

$$d(n) = 2z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$$

gegeben und verkürzt sich mit wachsendem Stichprobenumfang n. Wir wissen, dass $h(1-h) \leq \frac{1}{4}$ für $h \in [0;\ 1]$ (Abb. 4.2a). Somit gilt stets $d(n) \leq d_{\max} = \frac{z}{\sqrt{n}}$.

Beispiel

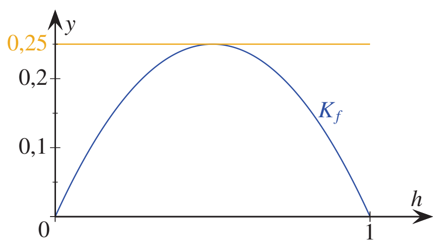
Wie oft muss eine Münze mindestens geworfen werden, damit die relative Häufigkeit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % um maximal einen Prozentpunkt von der wahren Wahrscheinlichkeit abweicht?

Lösung

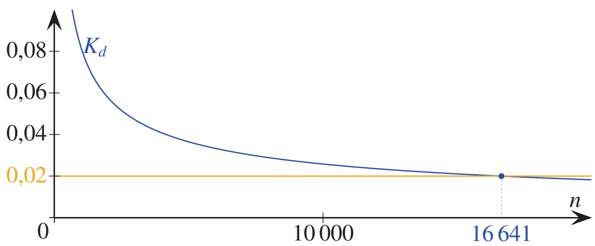
Der z-Wert zu der Vertrauenswahrscheinlichkeit 99 % beträgt $z = 2{,}58$. Für die Länge des Konfidenzintervalls gilt $d_{\max} = 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02$ und für die Stichprobenlänge somit

$$n \geq \frac{z^2}{d_{\max}^2} = \frac{2{,}58^2}{0{,}02^2} = 16\,641.$$

Also muss die Münze mindestens 16 641-mal geworfen werden (Abb. 4.2b).



(a) $f(h) = h(1-h) \leq \frac{1}{4}$ für $h \in [0;\ 1]$



(b) Graphische Bestimmung der Stichprobengröße

Abb. 4.2.: Schaubilder

Simulation

Wir führen nun ein Münzwurfexperiment praktisch durch. In jeder der insgesamt 100 Versuchsreihen werfen wir eine (echte) Münze 100-mal und berechnen die relative Häufigkeit für „Kopf" sowie das dazugehörige 95 %-Konfidenzintervall. Wie viele dieser 100 Konfidenzintervalle überdecken jeweils die echte (normalerweise unbekannte) Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ für „Kopf"?

In Abb. 4.3 sind die Simulationsergebnisse graphisch dargestellt. Je Versuchsreihe ist die relative Häufigkeit h als Punkt markiert und das dazugehörige Konfidenzintervall als Linie. Farblich markiert sind alle Intervalle, welche die Wahrscheinlichkeit p nicht überdecken. Unsere Berechnungen werden dabei bestätigt, denn in ca. 5 % aller Fälle (hier: 6 %) liegen wir falsch.

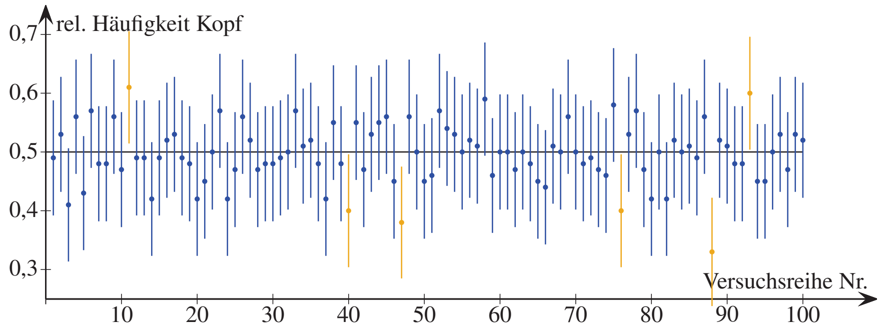


Abb. 4.3.: Simulation mit je 100 Versuchsreihen

Beispiel

Ein Meinungsforschungsinstitut möchte eine Umfrage unter deutschen Jugendlichen zwischen 12 und 18 Jahren mit der Frage

„Lesen Sie mindestens einmal pro Woche ein Buch?"

durchführen. Wie ist bei der Konzeption der Umfrage vorzugehen?

Lösung

Wir gehen in mehreren Schritten vor:

1. Bestimmen der *Grundgesamtheit*: In Deutschland leben ca. 5,5 Mio. Jugendliche zwischen 12 und 18 Jahren.
2. Festlegen der gewünschten Genauigkeit: Vertrauenswahrscheinlichkeit 95 % ($\Rightarrow z = 1{,}96$). Maximale Abweichung vom tatsächlichen Wert: 2 Prozentpunkte.
3. Schätzen der zu erwartenden relativen Häufigkeit: Ist dies nicht möglich, dann rechnen wir $d_{\max}$. Hier ist $d_{\max} = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04$.
4. Berechnen der Stichprobenlänge: $n \geq \frac{z^2}{d_{\max}^2} = \frac{1{,}96^2}{0{,}04^2} = 2\,401$.
5. Erstellen einer *repräsentativen Stichprobe*: Auswahl der 2 401 Befragten so, dass die gesamte Gesellschaftsstruktur (Alter, Geschlecht, Region, Schulart etc.) ausgewogen berücksichtigt ist.

• **173.** Eine Umfrage unter 120 Personen hat ergeben, dass 18 von ihnen Vegetarier sind. Ermitteln Sie ein Vertrauensintervall für den relativen Anteil an Vegetariern zum Konfidenzniveau 90 %.

• **174.** Eine Firma stellt Tennisbälle her. Bisherige Untersuchungen haben gezeigt, dass ca. 8 % aller produzierten Bälle Mängel aufweisen. In einer neuen Prüfung mit 600 Bällen sind 15 mangelhaft. Berechnen Sie ein 95 %-Vertrauensintervall für den unbekannten Anteil an mangelhaften Bällen und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

•• **175.** In einer Umfrage mit 800 Personen wurden die drei Konfidenzintervalle [0,273; 0,327], [0,258; 0,342], [0,268; 0,332] für die relative Häufigkeit h ermittelt. Ordnen Sie diese den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 %, 95 % und 99 % zu.

•• **176.** In drei Umfragen wurde jeweils die gleiche relative Häufigkeit h ermittelt. Es wurden jeweils drei 90 %-Konfidenzintervalle [0,572; 0,628], [0,560; 0,640], [0,543; 0,657] für h ermittelt. Ordnen Sie zu, in welchem Fall jeweils 200, 400 bzw. 800 Personen befragt wurden.

•• **177.** Geben Sie mit Begründung an, ob die folgenden Aussagen in einer Umfrage mit 1 000 Personen wahr oder falsch sind.

(a) Der Schätzwert für die relative Häufigkeit h hängt vom Zufall ab.

(b) Die Grenzen des Konfidenzintervalls für h hängen vom Zufall ab.

(c) Die Länge des Konfidenzintervalls für h hängt vom Zufall ab.

•• **178.** In einer Umfrage mit 100 Schülern haben 45 die Frage „Gehen Sie gerne in den Deutschunterricht?“ mit „Ja“ beantwortet. Mit Hilfe der in Abb. 4.4 dargestellten Figur, der *Konfidenzellipse*, lässt sich das 99 %-Konfidenzintervall zu jeder beliebigen relativen Häufigkeit graphisch bestimmen. Zunächst wird die relative Häufigkeit (hier: $h = 0{,}45$) als waagrechte Gerade eingezeichnet. Die x-Werte ihrer Schnittpunkte mit der Konfidenzellipse ergeben das gesuchte Intervall (hier: [0,33; 0,58]).
Von 100 Schülern haben 75 die Frage „Gehen Sie gerne in den Sportunterricht“ mit „Ja“ beantwortet. Bestimmen Sie graphisch das 99 %-Konfidenzintervall für den relativen Anteil sportbegeisterter Schüler.

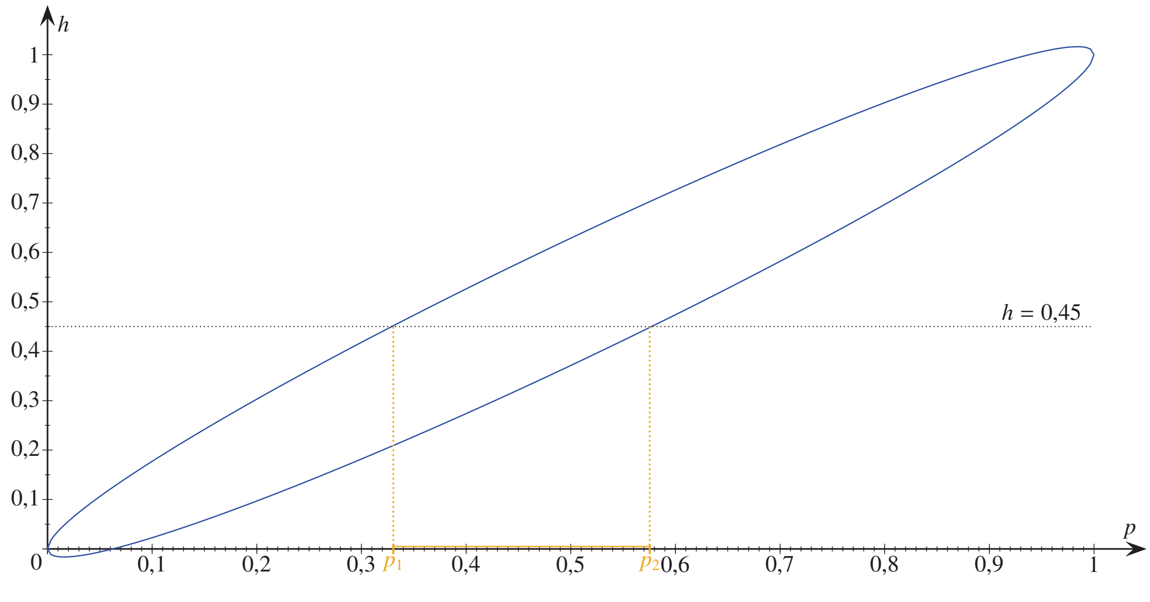


Abb. 4.4.: Konfidenzellipse zu Aufgabe 178

•• **179.** Ein Würfel wird 600-mal geworfen. Er zeigt 120-mal die Zahl 6.

(a) Tim berechnet das 90 %-Konfidenzintervall für die relative Häufigkeit der Zahl 6 und erhält [0,17; 0,23]. Er sagt: “Ich denke, der Würfel ist gezinkt, denn die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ liegt außerhalb des Intervalls.“ Beurteilen Sie diese Aussage.

(b) Sophie berechnet das 99 %-Konfidenzintervall für die relative Häufigkeit der Zahl 6 und erhält [0,16; 0,24]. Sie sagt: “Ich denke, der Würfel ist fair, denn die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ liegt innerhalb des Intervalls.“ Beurteilen Sie diese Aussage.

(c) Begründen Sie, warum das Konfidenzintervall von Sophie länger als das von Tim sein muss.

•• **180.** In einer Studie untersucht eine Großstadt, ob sich Fahrkartenkontrollen in der U-Bahn lohnen. Im Durchschnitt werden 5 von 1 000 kontrollierten Fahrgästen beim Schwarzfahren erwischt. Die Strafe für das Fahren ohne gültiges Ticket beträgt 60 €. Ein Kontrolleur kann pro Stunde 200 Fahrgäste überprüfen und kostet die Großstadt pro Stunde 30 €.

(a) Ermitteln Sie ein 90 %-Vertrauensintervall für den unbekannten Anteil an Schwarzfahrern.

(b) Zeigen Sie, dass die Großstadt in 90 % aller Fälle mit einem Verlust bzw. Gewinn zwischen −72 € und 372 € rechnen kann.

Die Großstadt möchte einen Gewinn erzielen, sobald ein Kontrolleur unter 1 000 kontrollierten Fahrgästen 2 Schwarzfahrer entdeckt.

(c) Wie viele Fahrgäste müsste ein Kontrolleur unter den obigen Bedingungen pro Stunde überprüfen können, wenn er die Großstadt pro Stunde 30 € kostet?

(d) Wie viel dürfte ein Kontrolleur die Stadt unter den obigen Bedingungen pro Stunde kosten, wenn er pro Stunde 200 Fahrgäste überprüfen kann?

•• **181.** Ein Unternehmen plant, eine Studie zur Gewinnung neuer Kunden durchzuführen. In Abb. 4.5 ist die notwendige Stichprobenanzahl in Abhängigkeit von der zu erwartenden relativen Häufigkeit interessierter Personen dargestellt. Die Sicherheitswahrscheinlichkeit beträgt dabei 95 %.

(a) Wie viele Personen müssen befragt werden, wenn eine relative Häufigkeit von ca. 10 % erwartet wird?

(b) Wie viele Personen müssen befragt werden, wenn über die zu erwartende relative Häufigkeit keinerlei Informationen vorliegen?

(c) Skizzieren Sie grob den Verlauf eines Schaubildes, mit dem man die notwendige Stichprobenanzahl für ein 90 %-Vertrauensintervall ermitteln kann.

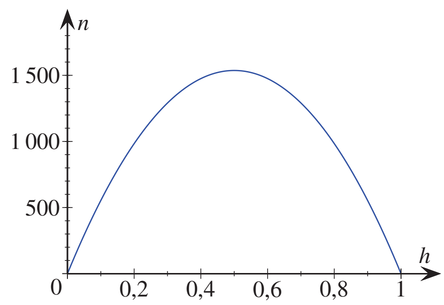


Abb. 4.5.: Schaubild zu Aufgabe 181

182. Wie viele Personen müssen in einer Studie mindestens befragt werden, damit der relative Anteil bereits an Windpocken erkrankter Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % um maximal einen Prozentpunkt vom zu erwartenden Ergebnis abweicht?

183. Bei einer Umfrage mit 1 000 Befragten vor einer großen Wahl geben 250 Personen an, dass sie ihre Stimme für Partei A abgeben wollen.

(a) Ermitteln Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für den Wähleranteil von Partei A.

(b) Wie viele Personen müssen mindestens befragt werden, damit das Ergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7 % um maximal zwei Prozentpunkte vom zu erwartenden Ergebnis abweicht?

(c) Angenommen, die Partei wird nur von 10 % der Bevölkerung gewählt. Müssen dann genauso viele Leute befragt werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

184. Eine Schule führt eine Umfrage durch, ob ihre Schüler mit den Lehrern zufrieden sind. Von 200 befragten Schülern antworten 120 mit „Ja".

(a) Ermitteln Sie ein Konfidenzintervall für den relativen Anteil zufriedener Schüler zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %.

(b) Der Direktor sagt: „Um die Länge des Konfidenzintervalls zu halbieren, müssten wir 400 statt 200 Schüler befragen." Hat er Recht? Begründen Sie.

(c) Ein Schüler entgegnet: „Wir hätten schon vor der Durchführung der Umfrage den notwendigen Stichprobenumfang bestimmen können. Wenn wir eine Abweichung von z.B. maximal 5 Prozentpunkten haben wollen, dürfen wir allerdings nicht die Ungleichung $2 \cdot 0{,}05 \geq 2z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$ nach n auflösen, sondern müssen das für die Ungleichung $2 \cdot 0{,}05 \geq 2z\sqrt{\frac{0{,}5\cdot(1-0{,}5)}{n}}$ tun." Hat er Recht? Begründen Sie.

185. Worüber würden Sie gerne eine Umfrage durchführen? Skizzieren Sie Ihren Entwurf dieser Umfrage und führen Sie diese durch. Bewerten Sie das Ergebnis und gegebenenfalls aufgetretene Probleme.

★ **186.** Eine (möglicherweise gezinkte) Münze wird n-mal geworfen. Damit die Anzahl k von „Kopf" innerhalb des Prognoseintervalls liegt, muss mit der Wahrscheinlichkeit γ gelten:

$$np - z\sqrt{np(1-p)} \leq k \leq np + z\sqrt{np(1-p)}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Ungleichung umgeformt werden kann in

$$p^2\left(1 + \frac{z^2}{n}\right) + p\left(-\frac{2k}{n} - \frac{z^2}{n}\right) + \frac{k^2}{n^2} \leq 0$$

(b) Zeigen Sie, dass für die Lösungen p der Ungleichung gilt: $p \in [p_1;\ p_2]$ mit

$$p_{1/2} = \frac{h + \frac{z^2}{n} \pm z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n} + \frac{z^2}{4n^2}}}{1 + \frac{z^2}{n}},$$

wobei $h = \frac{k}{n}$.

(c) Vereinfachen Sie die Formel, indem Sie alle Terme der Form $\frac{\cdots}{n}$ durch 0 ersetzen, die Terme der Form $\frac{\cdots}{\sqrt{n}}$ jedoch nicht. Warum ist diese Vereinfachung möglich?

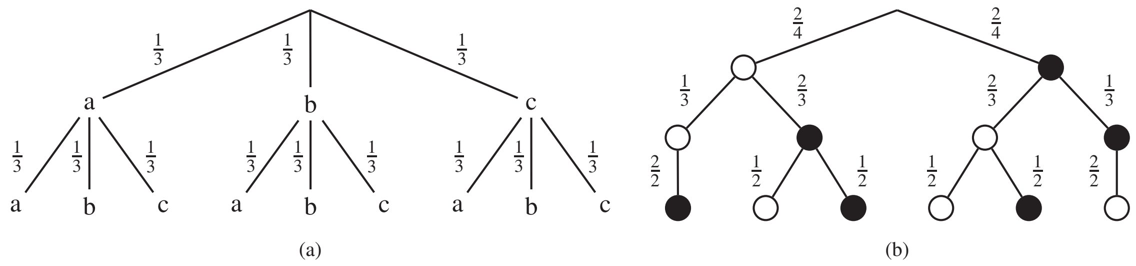
Teil II.

Lösungen

Mehrstufige Zufallsexperimente (S. 18 – 23)

14. (a) $\Omega = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$. Baumdiagramm siehe Abb. 5.9a.

(b) $\Omega = \{wws, wsw, wss, sww, sws, ssw\}$. Baumdiagramm siehe Abb. 5.9b.



(a) (b)

Abb. 5.9.: Baumdiagramme zu Aufgabe 14

15. $|\Omega| = 36$. $A = \{13, 22, 31\}$, $|A| = 3$. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. $B = \{11, 12, 13, 21, 22, 31\}$, $|B| = 6$, $P(B) = \frac{1}{6}$. $C = \{46, 55, 56, 64, 65, 66\}$, $|C| = 6$, $P(C) = \frac{1}{6}$. $D = \{14, 22, 41\}$, $|D| = 3$, $P(D) = \frac{1}{12}$. $E = \{13, 24, 31, 35, 42, 46, 53, 64\}$, $|E| = 8$, $P(E) = \frac{2}{9}$. $F = \{13, 26, 31, 62\}$, $|F| = 4$, $P(F) = \frac{1}{9}$.

16. (a) $|\Omega| = 2^4 = 16$.

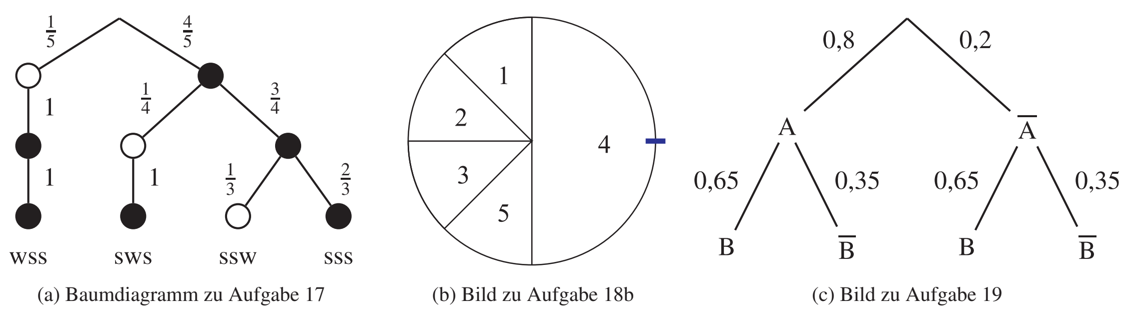
(b) $A = \{KZZZ, ZKZZ, ZZKZ, ZZZK\}$, $|A| = 4$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. $B = \{KKZZ, KZKZ, KZZK, ZKKZ, ZKZK, ZZKK\}$, $|B| = 6$, $P(B) = \frac{3}{8}$. Bei dem Ereignis C hilft uns das Gegenereignis: $\overline{C} = \{KKKK\}$, $C = \Omega \setminus \{KKKK\}$, $|C| = 15$, $P(C) = \frac{15}{16}$.

(c) Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit P(D) des Ereignisses D = „mindestens einmal Kopf bei n Würfen“ betrachten wir das Gegenereignis $\overline{D}$ = „kein Kopf bei n Würfen“: $P(D) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Auflösen der Ungleichung $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0{,}96$ ergibt $n \geq \log_{0,5} 0{,}04 = 4{,}64$. Die Münze muss also mindestens fünfmal geworfen werden.

17. (a) Baumdiagramm siehe Abb. 5.10a.

(b) $\Omega = \{wss, sws, ssw, sss\}$.

(c) $A = \{ssw\}$, $P(A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$. $B = \{wss, sws, ssw\}$, $P(B) = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$.
$C = \{wss, sws, sss\}$, $P(C) = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$.



(a) Baumdiagramm zu Aufgabe 17 (b) Bild zu Aufgabe 18b (c) Bild zu Aufgabe 19

Abb. 5.10.: Lösungsbilder

Mit diesem Übungsbuch können Sie sich langfristig und gezielt auf die Abiturprüfung in Ihrem Bundesland vorbereiten.

Alle Grundlagen und die neuen Unterrichtsinhalte werden anschaulich und mit vielen Bildern erklärt

Für alle Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad angegeben. Alle Lösungswege stehen zur Verfügung und ermöglichen so eine individuelle und selbständige Vorbereitung.

mit „einfachen" Zahlen

viele Bilder

Beispielaufgaben

Erklärungen

viele Übungen

alle Lösungswege

individuell

für leistungsschwache und -starke Schüler

ISBN 978-3-9817902-0-7

9 783981 790207